

3.2-LES EMPRUNTS OBLIGATAIRES :

3.2.1-Définition :

Lorsque le montant de l'emprunt est très élevé, l'emprunteur est obligé de s'adresser à plusieurs prêteurs appelés « obligataires » ou « souscripteurs ». En effet, le montant de l'emprunt est divisé en parts égales négociables appelées obligations. En dehors de certains cas particuliers, l'obligation donne à son détenteur le droit de percevoir un intérêt annuel (coupon) et d'être remboursé de son titre à l'échéance. Les principes mathématiques sont identiques à ceux des emprunts indivis sauf que le capital emprunté est remboursé à différents prêteurs. Donc, pour constituer un capital de nominal C_0 , l'emprunteur émet N obligations égales d'un montant VN . On aura : $C_0 = VN * N$

3.2.2-Les principales caractéristiques d'une obligation :

Les obligations sont caractérisées par les éléments suivants :

- La valeur nominale (VN) : C'est la valeur faciale de l'obligation. Elle est unique pour toutes les obligations d'un même emprunt. Elle constitue le montant à partir duquel est établi le tableau d'amortissement et la base de calcul des intérêts.
- La valeur d'émission (VE) : C'est la somme effectivement payée par l'obligataire pour l'achat d'une obligation. Ce prix peut être différent du nominal. Lorsqu'il est égal au nominal, on dit que l'obligation est émise « au pair », s'il en est inférieur, on dit que l'obligation est « au-dessous du pair » alors que s'il en est supérieur, on dit que l'émission est « au-dessus du pair ». La différence entre la valeur d'émission et la valeur nominale est appelée prime d'émission.
- La valeur de remboursement (VR) : C'est la somme versée par l'emprunteur au moment du remboursement de l'obligation. Cette somme peut être égale à la valeur nominale, on parle dans ce cas d'un remboursement « au pair », ou supérieure à la valeur nominale et on parle alors d'un remboursement « au-dessus du pair ». La différence entre la valeur de remboursement et la valeur d'émission est appelée prime de remboursement. Le mode de remboursement peut être :

- ❖ En bloc ou in fine : tous les titres sont remboursés en une seule fois à l'échéance.
 - ❖ Par amortissement constant : un même nombre d'obligations tirées au sort est remboursé chaque année.
 - ❖ Par annuités sensiblement constantes : les obligations à amortir chaque année sont également tirées au sort. Les annuités ne sont pas strictement constantes parce que l'amortissement doit concerner un nombre entier d'obligations.
- Le taux nominal (i) : C'est la rémunération de l'obligation. On l'appelle aussi taux facial. Appliqué à la valeur nominale, il permet de calculer le montant des intérêts (coupon).
 - La date de souscription : C'est la date de règlement de l'achat de l'obligation par le souscripteur.
 - La date de jouissance : C'est la date à partir de laquelle les intérêts commencent à courir.
 - Le coupon (c) : c'est le montant des intérêts servis à chaque échéance, pour chaque obligation. On a : $c = VN * i$.

3.2.3-Remboursement d'un emprunt obligataire :

Soit :

- N : nombre des obligations émises.
- VE : prix d'émission de l'obligation.
- VN : valeur nominale de l'obligation.
- VR : valeur de remboursement de l'obligation.
- i: taux du coupon.
- C : coupon = $VN * i$.
- N1, N2.....Nn : nombre d'obligation restant en circulation après le 1er, 2e ,.....ne tirage. (Nn = 0).
- m1, m2.....mn : nombre de titres amortis au 1er, 2e ,.....ne tirage.
- a1, a2.....an : montant de l'annuité relative au 1er, 2e ,.....ne tirage.

Période	Dette en début de période	Intérêts	Amortis.	Annuités	Nombre de titres en circulation
1	$C_0 = N * V_N$	$N * c$	$m_1 * V_R$	$a_1 = N*c+m_1*V_R$	$N_1 = N - m_1$
2	$C_1 = N_1 * V_N$	$N_1 * c$	$m_2 * V_R$	$a_2 = N_1*c+ m_2*V_R$	$N_2 = N_1 - m_2$
p	$C_{p-1} = N_{p-1} * V_N$	$N_{p-1} * c$	$m_p * V_R$	$a_p = N_{p-1}*c+ m_p*V_R$	$N_p = N_{p-1} - m_p$
n-1	$C_{n-2} = N_{n-2} * V_N$	$N_{n-2} * c$	$m_{n-1}*V_R$	$a_{n-1}= N_{n-2}*c+m_{n-1}*V_R$	$N_{n-1} = N_{n-2} - m_{n-1}$
n	$C_{n-1} = N_{n-1} * V_N$	$N_{n-1} *c$	$m_n * V_R$	$a_n = N_{n-1}*c+ m_n*V_R$	$N_n = N_{n-1} - m_n$

$$N_n = N_{n-1} - m_n = 0 \Rightarrow N_{n-1} = m_n$$

$$\text{Or } a_n = N_{n-1} * c + m_n * V_R = m_n * c + m_n * V_R = m_n * (c + V_R)$$

$$a_n = m_n * (c + V_R)$$

❖ **Relation entre les annuités et les amortissements :**

$$a_{p+1} = N_p * c + m_{p+1} * V_R \Leftrightarrow a_{p+1} = (N_{p-1} - m_p) * c + m_{p+1} * V_R$$

$$\text{Et } a_p = N_{p-1} * c + m_p * V_R$$

$$\begin{aligned} a_{p+1} - a_p &= (N_{p-1} - m_p) * c + m_{p+1} * V_R - N_{p-1} * c - m_p * V_R \\ &= m_{p+1} * V_R - m_p * c - m_p * V_R \\ &= m_{p+1} * V_R - m_p * (c + V_R) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } a_{p+1} - a_p = m_{p+1} V_R - V_R m_p \left(\frac{c}{V_R} + 1 \right)$$

Posons, r : le taux d'intérêt, qui appliqué à la valeur de remboursement, nous donne le

$$\text{coupon: } r = \frac{c}{V_R}$$

$$\text{On aura alors, } a_{p+1} - a_p = m_{p+1} * V_R - V_R * m_p * (r+1)$$

❖ **Remboursement d'un emprunt obligataire par annuités constantes :**

➤ **Loi de succession des amortissements :**

On a $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$

Or $a_{p+1} - a_p = m_{p+1} V_R - V_R m_p (1+r)$

D'où $m_{p+1} V_R = m_p V_R (1+r)$

Donc $m_{p+1} = m_p (1+r)$

Les amortissements sont en progression géométrique de raison $(1+r)$.

➤ **Relation entre le nombre d'obligations et l'annuité n constante :**

On peut démontrer que $a = N \cdot V_R \cdot \frac{r}{1 - (1+r)^{-n}}$

➤ **Remboursement d'un emprunt obligataire par amortissements constants :**

Comme pour l'emprunt indivis, les annuités sont en progression arithmétique de raison

$$\left(-\frac{C_0}{n} \cdot i \right)$$